

Ejercicios de Análisis Matemático

Derivadas 1

1. El área de un círculo máximo de una esfera está aumentando a razón de 5cm^2 por segundo cuando el radio es igual a 3cm. Calcula la tasa de incremento del volumen de la esfera cuando el radio es de 3cm.
2. Sean f, g funciones derivables y que pueden componerse y sea $h = f \circ g$. Supongamos que:

$$g(1) = 3, \quad g'(1) = 2, \quad f'(3) = -1, \quad g''(1) = 1, \quad f''(3) = -2.$$

Calcula $h'(1)$ y $h''(1)$.

3. Calcula las derivadas primera y segunda de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

¿Qué puedes decir de la derivada tercera?

4. Sea $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$. Justifica que f es una biyección sobre su imagen $[4, 4^4]$ y que su función inversa f^{-1} es derivable. Calcula $(f^{-1})'(27)$.
5. Calcula la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en un punto $(a, \sqrt{1-a^2})$ con $a \neq \pm 1$ y comprueba que dicha recta corta a la circunferencia en un único punto.
6. Calcula un punto de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ tal que la tangente en dicho punto a la elipse pase por el punto $(4, 2)$.
7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \sin(\sin^2 x)$

2) $f(x) = \sin^2(\sin x)$

3) $f(x) = \sin(\sin(x^2 \cos x))$

4) $f(x) = \cos^2(\sin^2 x)$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{2 - \cos x}}$

6) $f(x) = \log \left(\frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} \right)$

7) $f(x) = (2 + \sin^2 x)^{\arctan x}$

8) $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$

Lecturas obligatorias. Debes leer y entender las definiciones y resultados principales del Capítulo 6, pero no es preciso que estudies las demostraciones.

Lecturas optativas. La sección 6.8 del Capítulo 6 “Orígenes y desarrollo del concepto de derivada”.